LA SINGULARITÉ DE O'GRADY

MANFRED LEHN & CHRISTOPH SORGER

RÉSUMÉ. Soit M_{2v} l'espace de modules des faisceaux semi-stables de vecteur de Mukai $2v$ sur une surface K3 ou abélienne où v est primitif tel que $\langle v, v\rangle = 2$. Nous montrons que l'éclatement de M_{2v} le long de son lieu singulier réduit fournit une résolution symplectique des singularités. Ceci donne une description directe des résolutions de O'Grady de $M_{K3}(2,0,4)$ et $M_{Ab}(2,0,2)$.

ABSTRACT. Let M_{2v} be the moduli space of semistable sheaves with Mukai vector $2v$ on an abelian or K3 surface where v is primitive such that $\langle v, v\rangle = 2$. We show that the blow-up of the reduced singular locus of M_{2v} provides a symplectic resolution of singularities. This provides a direct description of O'Grady's resolutions of $M_{K3}(2,0,4)$ and $M_{Ab}(2,0,2)$.

1. L'espace de modules de O'Grady

Il est notoirement difficile de produire des variétés holomorphiquement symplectiques irréductibles compactes. À déformation près, il y a les deux séries infinies trouvées par A. Beauville [4], à savoir les schémas de Hilbert des points sur une surface $K3$ et les variétés de Kummer généralisées associées à une surface abélienne, et les deux exemples isolés construits par O'Grady ([14], [15]).

Selon Mukai, les espaces de modules de faisceaux stables sur une surface $K3$ ou abélienne sont lisses et munis d'une forme symplectique holomorphe. Si les paramètres numériques, à savoir le rang et les classes de Chern, sont choisis de façon à ce qu'il n'existe pas de faisceau strictement semi-stable, les espaces de Mukai sont compacts mais se déforment dans les exemples de Beauville.

La stratégie de O'Grady pour la construction de ses exemples est de considérer certains espaces de modules singuliers puis de les résoudre symplectiquement si possible. La résolution de O'Grady est relativement compliquée : elle consiste en deux éclatements suivis d'une contraction sur un schéma de paramètres muni d'une action d'un groupe de reparamétrisation où il faut

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14J60 ; Secondary 14D20, 14J28.

tenir compte à chaque étape du comportement de la semi-stabilité des points sous-jacents.

Nous montrons ici que l'éclatement du lieu singulier réduit de l'espace de modules fournit directement une résolution symplectique des singularités. La méthode consiste en une étude locale détaillée des singularités de l'espace de module sans référence aux techniques de constructions globales.

Soit X une surface projective lisse de type $K3$ ou abélien. Soit de plus $v \in H^{\mathrm{pair}}(X, \mathbb{Z})$ et soit M_v l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur X par rapport à un diviseur ample H et ayant vecteur de Mukai v (voir section 5).

Théorème 1.1. — *Soit $v \in H^{\mathrm{pair}}(X, \mathbb{Z})$ un élément primitif avec $\langle v, v\rangle = 2$ et H un diviseur ample $2v$-générique. Alors l'éclatement de M_{2v} le long de son lieu singulier réduit est une résolution symplectique des singularités.*

Les hypothèses du théorème couvrent à la fois les exemples de O'Grady [14, 15] et aussi celles, similaires, de Rapagnetta [16]. Un phénomène similaire a été observé par Haiman pour la puissance symétrique de $\mathbb{C}^2$ et la résolution symplectique donné par le schéma de Hilbert [9],[10]. Par ailleurs, dans [12], nous avons montré qu'à part dans les cas ci-dessus du théorème 1.1, les espaces de modules des faisceaux semi-stables sans torsion sur une surface $K3$ ou abélienne n'admettent pas de résolution symplectique en rang $r \geq 2$ (voir [12], Théorème B pour l'énoncé précis).

Le plan de la démonstration est le suivant. Nous allons d'abord étudier la géométrie d'une certaine orbite nilpotente $Z \subset \mathfrak{sp}_4$ qui nous servira comme modèle locale pour la plus mauvaise singularité de M_{2v}, puis on établira une version analogue du théorème 1.1 pour Z (Théorème 2.1). Ensuite, nous montrerons un résultat essentiel pour notre preuve qui est aussi d'intérêt indépendant, à savoir que Z possède une certaine rigidité relative aux déformations : une déformation de Z qui ne change pas les singularités de Z en dehors de l'origine ne peut déformer la singularité à l'origine non plus. Plus précisément, on montrera que le module T^1_Z est pur (Théorème 3.1).

Après ces préparations nous étudierons la structure locale de l'espace de modules. Les singularités de l'espace de modules proviennent à la fois du passage au quotient par l'action des groupes d'automorphismes et du comportement de l'application de Kuranishi dont nous rappelons la construction et ses propriétés dans un appendice (Appendice A). Nous nous placerons ensuite en la plus mauvaise singularité et montrerons que le cône normal de cette singularité est isomorphe au modèle affine ci-dessus (Théorème 4.5).

Finalement, nous montrerons, par un argument de déformation explicite, que la singularité est formellement isomorphe à son cône normal.

On voit ainsi que l'éclatement du lieu singulier réduit donne une résolution semi-petite des singularités de M_{2v}. Il est connu que la forme symplectique s'étend sur l'image réciproque de la partie générique du lieu singulier qui consiste en des singularités de type A_1 (*cf.* [14]). Cette forme s'étend partout pour des raisons de codimension.

Remerciements : Nous remercions Duco van Straten pour le aide avec les déformations ainsi que Theo de Jong et Dmitry Kaledin pour nos discussions très constructives. Nous avons fait des expériences avec SINGULAR [6] et nous remercions Gert-Martin Greuel pour son aide pendant nos premiers pas avec ce logiciel. Finalement, nous remercions le referee pour nous avoir signalé que notre argument dans la première version de cet article était incomplet.

2. Le modèle algébrique et sa résolution

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension 4 muni d'une forme symplectique ω. On désigne par $\mathfrak{sp}(V)$ l'algèbre de Lie symplectique associé. Soit $Z \subset \mathfrak{sp}(V)$ la sous-variété des $B \in \mathfrak{sp}(V)$ tels que $B^2 = 0$. Les 16 coefficients de la matrice B^2 ne sont pas indépendants : l'idéal $I_0 \subset \mathbb{C}[\mathfrak{sp}(V)]$ de Z est engendré par 6 quadriques. Il est connue que Z est l'adhérence de l'orbite nilpotente de type $\mathfrak{o}(2,2)$ (voir [5], [8] pour plus de détails). Le lieu singulier Z_{sing} de Z consiste en les B ayant rang ≤ 1 ; son idéal L_0 est engendré par les coefficients de $\Lambda^2 B$, c'est-à-dire les 2×2-mineurs de B.

On sait qu'on obtient une résolution de Z de la manière suivante. Soit G la grassmannienne des sous-espaces vectoriels $U \subset V$ isotropes maximaux. La variété G est isomorphe à la sous-variété de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V^*) = \mathbb{P}^5$ définie par l'équation quadratique $\varphi \wedge \varphi = 0$ et l'équation linéaire $\omega(\varphi) = 0$ avec $\varphi \in \Lambda^2 V$. Soit $\mathcal{U} \subset V \otimes \mathcal{O}_G$ le sous-fibré tautologique. Comme ω est non-dégénérée et les fibres de $\mathcal{U}$ sont isotropes par construction, ω induit un accouplement parfait $\mathcal{U} \times (V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_G)/\mathcal{U} \to \mathcal{O}_G$. On obtient ainsi la suite exacte tautologique

$$0 \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_G \longrightarrow \mathcal{U}^* \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Le fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}^*, \mathcal{U})$ est la restriction à G du fibré cotangent de $\mathrm{Grass}(2, V)$; le fibré cotangent T^*G de G s'identifie avec le sous-fibré des formes symétriques sur $\mathcal{U}^*$.

Soit $\widetilde{Z} \subset Z \times G$ la sous-variété des paires (B, U) telles que $B(U) = 0$. Désignons par $\sigma : \widetilde{Z} \to Z$ et $\pi : \widetilde{Z} \to G$ les deux projections canoniques. Par construction, pour un élément $(B, U) \in \widetilde{Z}$, l'endomorphisme $B : V \to V$ se factorise comme suit

$$V \longrightarrow U^* \xrightarrow{\overline{B}} U \longrightarrow V \tag{2.2}$$

où $\overline{B}$ est une forme quadratique sur U^*. On voit ainsi que $\pi : \widetilde{Z} \to G$ est isomorphe à la projection canonique $T^*G \to G$. Par conséquent, $\widetilde{Z}$ est lisse.

Le morphisme $\sigma : \widetilde{Z} \to Z$ est une résolution semi-petite : la fibre de σ au-dessus d'un point $B \in Z$ de rang 1 est isomorphe à $\mathbb{P}((\operatorname{Ker} B/\operatorname{Im} B)^*) = \mathbb{P}^1$ et au-dessus de $B = 0$ isomorphe à G.

Théorème 2.1. — *La résolution $\sigma : \widetilde{Z} \to Z$ est isomorphe à l'éclatement de Z le long de $Z_{sing} \subset Z$.*

Démonstration. Soit $b : V \otimes \mathcal{O}_Z \to V \otimes \mathcal{O}_Z$ l'homomorphisme canonique qui en $B \in Z$ multiplie par B. Par construction $\sigma^* b$ s'annule sur $\pi^*\mathcal{U}$. On obtient la factorisation

$$\sigma^* b : V \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{Z}} \longrightarrow \pi^*\mathcal{U}^* \xrightarrow{\overline{b}} \pi^*\mathcal{U} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{Z}} \tag{2.3}$$

En passant à la puissance extérieure

$$\sigma^*\Lambda^2 b : \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{Z}} \longrightarrow \pi^* \det \mathcal{U}^* \xrightarrow{\Lambda^2\overline{b}} \pi^* \det \mathcal{U} \longrightarrow \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{Z}} \tag{2.4}$$

on voit que l'annulation de la section $\Lambda^2\overline{b}$ du fibré inversible $\pi^*(\det \mathcal{U})^2$ équivaut à l'annulation de $\sigma^*\Lambda^2 b$. Par conséquent, on a

$$J := \sigma^{-1} L_0 \cdot \mathcal{O}_{\widetilde{Z}} \cong \pi^*(\det \mathcal{U}^*)^2 \cong \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V^*)}(2) \tag{2.5}$$

On observe par ailleurs que $\sigma_*(\mathcal{O}_{\widetilde{Z}}) = \mathcal{O}_Z$ puisque les singularités de Z sont rationnelles. Considérons maintenant les inclusions

$$L_0 \mathcal{O}_Z \subset \sigma_* J \subset \mathcal{O}_Z \tag{2.6}$$

Les radicaux de $L_0\mathcal{O}_Z$ et $\sigma_* J$ coïncident. Comme L_0 est un idéal premier, $L_0\mathcal{O}_Z = \sigma_* J$. Selon le lemme suivant, on a également $L_0^n \mathcal{O}_Z = \sigma_*(J^n)$. Ainsi

$$\widetilde{Z} \cong \operatorname{Proj}(\bigoplus \sigma_*(J^n)) = \operatorname{Proj}(\bigoplus L_0^n \mathcal{O}_Z) = \operatorname{Bl}(Z). \tag{2.7}$$

□

Lemme 2.2. — *L'homomorphisme $(\sigma_* J)^{\otimes n} \to \sigma_*(J^n)$ est surjectif.*

Démonstration. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T^*G & \xrightarrow{\pi} & G \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & * \end{array}$$

Observons maintenant que l'on a

$$H^0(Z, \sigma_*(J^n)) = H^0(G, \pi_*\pi^*\mathcal{O}(2n)) = H^0(G, S^*(T_G) \otimes \mathcal{O}(2n)). \tag{2.8}$$

Comme Z est affine, il suffit de montrer que

$$H^0(G, S^*(T_G) \otimes \mathcal{O}(2))^{\otimes n} \to H^0(G, S^*(T_G) \otimes \mathcal{O}(2n))$$

est surjectif. Pour cela, il suffit de voir que

$$H^0(G, \mathcal{O}(2)) \otimes H^0(G, S^k(T_G) \otimes \mathcal{O}(2n)) \to H^0(G, S^k(T_G) \otimes \mathcal{O}(2n+2))$$

est surjectif pour tout $k \geq 0$ et tout $n \geq 1$ ou encore que $S^k(T_G)$ est 2-régulier sur G au sens de Mumford-Castelnuovo [13]. Que $H^1(G, S^k(T_G)(1)) = 0$ est conséquence immédiate du théorème d'annulation de Griffiths [7]. L'annulation de $H^2(G, S^k(T_G))$ et de $H^3(G, S^k(T_G)(-1))$ se déduit des suites exactes

$$0 \longrightarrow S^{k-1}(\mathcal{O}_G(1)^{\oplus 5}) \longrightarrow S^k(\mathcal{O}_G(1)^{\oplus 5}) \longrightarrow S^k(T_{\mathbb{P}^4}|_G) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow S^k(T_G) \longrightarrow S^k(T_{\mathbb{P}^4}|_G) \longrightarrow S^{k-1}(T_{\mathbb{P}^4}|_G) \otimes \mathcal{O}_G(2) \longrightarrow 0.$$

□

3. Rappel sur des déformations et Rigidité

Soit (X, x_0) un germe d'un espace analytique. Une déformation de X est une application plate $f : (\mathcal{X}, x_0) \to (S, s_0)$ des germes d'espaces analytiques avec un isomorphisme explicite $\mathcal{X}_0 \cong X$ de la fibre spéciale $\mathcal{X}_0 = f^{-1}(s_0)$. Soit $\mathrm{Def}(X)$ le foncteur qui associe à une base S l'ensemble des déformations de X sur S modulo isomorphisme. L'espace tangent formel $\mathrm{Def}(X)(\mathbb{C}[\varepsilon])$ est le germe d'un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules cohérent T^1_X défini comme suit : Soit $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ donné par l'idéal $I \subset \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ et soit $\Theta : \mathcal{O}_X\langle \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}\rangle \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(I/I^2, \mathcal{O}_X)$ l'homomorphisme naturel avec $\partial_{x_i} \mapsto (f \mapsto \partial_{x_i}(f))$. Alors $T^1_X = \mathrm{Coker}(\Theta)$. Par le critère de Jacobi T^1_X a pour support le lieu singulier de X.

Pour une hypersurface $X = \{f = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ le calcul de T^1_X est simple : $T^1_X = \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}/(f, \partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f)$. Par exemple, pour la singularité de type A_1, $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$ on trouve $T^1_X = \mathbb{C}$.

Le théorème suivant est essentiel pour la démonstration de notre résultat principal. Il montre une certaine rigidité inattendue de la singularité de Z :

Théorème 3.1. — *Soit $Z \subset \mathfrak{sp}(V)$ la variété définie ci-dessus. Alors le $\mathcal{O}_Z$–module T^1_Z est pur de dimension 4.*

Démonstration. Rappelons que Z est singulier le long du lieu de matrices de rang ≤ 1 dans $\mathfrak{sp}_4$. En un point $p \in Z_{sing} \setminus \{0\}$, le germe (Z, p) est essentiellement une singularité de type A_1. Plus précisément, il est analytiquement isomorphe au germe $(\mathbb{C}^4, 0) \times (\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}, 0)$. On en déduit que la restriction de T_Z^1 à $Z \setminus \{0\}$ est localement libre de rang 1 le long de $Z_{sing} \setminus \{0\}$. Un sous-module de T_Z^1 de dimension < 4 est donc nécessairement concentré à l'origine.

Soit $\mathcal{I}_0 = I_0 \mathcal{O}_{\mathfrak{sp}(V)} \subset \mathcal{O}_{\mathfrak{sp}(V)}$ le faisceau d'idéaux de $Z \subset \mathfrak{sp}(V)$. Comme ci-dessus on désigne par $\Theta : T_{\mathfrak{sp}(V)}|_Z \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_0, \mathcal{O}_Z)$ le morphisme canonique qui associe à un champ de vecteurs la dérivation correspondante.

Une présentation de l'idéal $\mathcal{I}_0$ se construit comme suit. La structure symplectique ω sur V induit une anti-involution $f \mapsto f^t$ sur $\mathrm{End}(V)$ donnée par $\omega(f^t(v), w) = \omega(v, f(w))$ pour $v, w \in V$. Soit $\mathrm{End}(V) = E_+ \oplus E_-$ la décomposition par rapport aux valeurs propres de l'involution telle qu'en particulier $\mathfrak{sp}(V) = E_-$. On a une surjection

$$g : E_+^* \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{sp}(V)} \longrightarrow \mathcal{I}_0, \quad (\lambda, B) \mapsto \lambda(B^2). \tag{3.1}$$

En effet, $Z \subset \mathfrak{sp}(V)$ est défini par l'équation $B^2 = 0$, et $B^2 \in E_+$ pour $B \in \mathfrak{sp}(V)$. Il est facile à vérifier que la suite suivante est un complexe

$$(\Lambda^2 E_+^* \oplus E_+^*) \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{sp}(V)} \xrightarrow{r} E_+^* \otimes \mathcal{O}_{\mathfrak{sp}(V)} \xrightarrow{g} \mathcal{I}_0, \tag{3.2}$$

où l'application r est donnée sur la partie $\Lambda^2 E_+^*$ par les relations tautologiques $r(\lambda \wedge \mu, B) = \lambda \otimes \mu(B^2) - \mu \otimes \lambda(B^2)$ et sur la partie E_+^* par $r(\lambda, B) = \lambda \circ \mathrm{ad}\, B$. On peut montrer que (3.2) est une présentation de $\mathcal{I}_0$, mais nous n'en avons pas besoin. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{O}_Z)$ on obtient le complexe

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_0, \mathcal{O}_Z) \xrightarrow{g^\vee} E_+ \otimes \mathcal{O}_Z \xrightarrow{r^\vee} E_+ \otimes \mathcal{O}_Z. \tag{3.3}$$

Si d^0 désigne la composition

$$T_{\mathfrak{sp}(V)} \otimes \mathcal{O}_Z = E_- \otimes \mathcal{O}_Z \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_0, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow E_+ \otimes \mathcal{O}_Z \tag{3.4}$$

on voit que l'on a le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Le module T_Z^1 s'identifie à un sous-module du H^1 du complexe*

$$C^\bullet : E_- \otimes \mathcal{O}_Z \xrightarrow{d^0} E_+ \otimes \mathcal{O}_Z \xrightarrow{d^1} E_+ \otimes \mathcal{O}_Z \tag{3.5}$$

avec $d^0 : (b, B) \mapsto bB + Bb$ et $d^1 : (b, B) \mapsto bB - Bb$.

Pour démontrer le théorème 3.1, on va se placer sur la résolution $\sigma : \widetilde{Z} \to Z$ de la section précédente.

Lemme 3.3. — *On a* $H^1(C^\bullet) = \sigma_* H^1(\sigma^* C^\bullet)$.

Grâce à l'équivariance de $\sigma^* C^\bullet$ sous l'action de $\mathrm{Sp}(V)$ les noyaux, co-noyaux et groupes de cohomologie sont plats sur G (par rapport à $\pi : \widetilde{Z} = T^*G \to G$). On peut donc se restreindre à étudier la fibre au-dessus d'un $[U] \in G$.

Choisissons une décomposition $V = U \oplus U^*$ avec $\omega = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Un élément de E_- est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^* \end{smallmatrix}\right)$ avec des 2×2–matrices α, β, γ où β et γ sont symétriques. De même, un élément de E_+ est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha^* \end{smallmatrix}\right)$ avec des 2×2–matrices α, β, γ où β et γ sont anti-symétriques. La fibre F au-dessus de U est un $\mathbb{C}^3$ avec coordonnées x, y, z où $B = \sigma(x, y, z)$ est donnée par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \overline{B} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ avec $\overline{B}\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ y & z \end{smallmatrix}\right)$. Avec ces notations, on voit que

$$d^0|_F\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^* \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} B\gamma & \alpha B - B\alpha^* \\ 0 & \gamma B \end{smallmatrix}\right), \quad d^1|_F\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha^* \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -B\gamma & \alpha B - B\alpha^* \\ 0 & \gamma B \end{smallmatrix}\right). \tag{3.6}$$

Par conséquent, $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha^* \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Ker}(d^1|_F)$ si et seulement si $B\gamma = 0$ et αB est symétrique. De même $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha^* \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Im}(d^0|_F)$ si et seulement si $\gamma = 0$ et s'il existe γ' symétrique avec $\alpha = B\gamma'$ et α' avec $\beta = \alpha' B - B\alpha'^*$. En particulier, $\sigma^* C^\bullet|_F$ se décompose en trois parties suivant α, β ou γ. Plus précisément H^1 est la somme directe de

1. $H^1_I \ = \{\alpha \mid \alpha B \text{ symétrique }\}/\{B\gamma' \mid \gamma' \text{ symétrique }\}$
2. $H^1_{II} \ = \{\beta \mid \beta \text{ anti-symétrique }\}/\{\alpha' B - B\alpha'^* \mid \alpha' \text{ quelconque }\}$
3. $H^1_{III} = \{\gamma \mid B\gamma = 0 \text{ et } \gamma \text{ anti-symétrique}\}$

Commençons avec (3). Pour $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{smallmatrix}\right)$ on a $B\gamma = \left(\begin{smallmatrix} -yt & xt \\ -zt & yt \end{smallmatrix}\right)$. Ainsi

$$H^1_{III} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_F \xrightarrow{(x\ y\ z)^t} \mathcal{O}_F^3) = 0 \tag{3.7}$$

Pour (2) on observe que si $\alpha'\left(\begin{smallmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{smallmatrix}\right)$ on a $\alpha' B - B\alpha'^*\left(\begin{smallmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{smallmatrix}\right)$ avec $v = \alpha_{11} y + \alpha_{12} z - \alpha_{21} x - \alpha_{22} y$. Ainsi

$$H^1_{II} = \mathrm{Coker}(\mathcal{O}_F^4 \xrightarrow{(y\ z\ -x\ y)} \mathcal{O}_F) = \mathcal{O}_{\{0\}}. \tag{3.8}$$

Finalement pour (1), on calcule avec $\alpha\left(\begin{smallmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{smallmatrix}\right)$ et $\gamma'\left(\begin{smallmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{smallmatrix}\right)$ que

$$\alpha B \begin{pmatrix} \alpha_{11} x + \alpha_{12} y & \alpha_{11} y + \alpha_{12} z \\ \alpha_{21} x + \alpha_{22} y & \alpha_{21} y + \alpha_{22} z \end{pmatrix} \quad B\gamma' \begin{pmatrix} \gamma_{11} x + \gamma_{12} y & \gamma_{12} x + \gamma_{22} y \\ \gamma_{11} y + \gamma_{12} z & \gamma_{12} y + \gamma_{22} z \end{pmatrix}$$

Ainsi H^1_I est le H^1 du complexe

$$\mathcal{O}_F^3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & x & y \\ y & z & 0 \\ 0 & y & z \end{pmatrix}} \mathcal{O}_F^4 \xrightarrow{(y\ z\ -x\ y)} \mathcal{O}_F. \tag{3.9}$$

Maintenant, en utilisant le complexe de Koszul du point $\{0\} \in F$, on trouve

$$H^1_I = \mathcal{O}_{\{xz-y^2=0\}}. \tag{3.10}$$

On déduit de (3.7), (3.8) et (3.9) que $H^1(\sigma^* C^\bullet) = L \oplus M$ où L et M sont des fibrés en droites sur $\sigma^{-1}(Z_{sing})$ et $\sigma^{-1}(0) = G$ respectivement. Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que M n'a pas de section globale ce qui montrera que $\sigma_* M = 0$.

En fait, il est conséquence de la définition de H^1_{II} et de l'équation (3.8) que

$$M = \mathrm{Hom}_{\text{anti-sym}}(\mathcal{U}^*, \mathcal{U}) \subset E_+ \otimes \mathcal{O}_G \tag{3.11}$$

Par conséquent, on a des isomorphismes $M \cong \Lambda^2\mathcal{U} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^2 V)}(-1)$ et donc bien $\sigma_* M = 0$. □

4. La structure locale de l'espace de modules

Soit X une surface projective lisse munie d'un diviseur ample H. Soit M l'espace de modules des faisceaux H-semi-stables sur X de rang et de classes de Chern fixés. On sait que les points de M sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de faisceaux poly-stables, i. e. somme directe de faisceaux stables. Soit E un tel faisceau et soit $\mathrm{Ext}^p(E,E)_0$ la partie sans trace du $\mathrm{Ext}^p(E,E)$. Alors on a la description suivante de la structure locale de M en $[E]$.

Soit $\widehat{A}$ la complétion de l'anneau $A = \mathbb{C}[\mathrm{Ext}^1(E,E)]$ des fonctions polynômiales sur $\mathrm{Ext}^1(E,E)$ par rapport à l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ des fonctions qui s'annulent dans l'origine. La proposition suivante est bien connue :

Proposition 4.1. — *Il y a un élément $f \in \mathrm{Ext}^2(E,E)_0 \otimes \mathfrak{m}^2\widehat{A}$, dite* l'application de Kuranishi*, avec les propriétés suivantes :*

1. *f est équivariante par rapport à l'action de* $\mathrm{Aut}(E)$ *sur* $\mathrm{Ext}(E,E)$ *par conjugaison.*
2. *La partie initiale $f_2 \in \mathrm{Ext}^2(E,E)_0 \otimes \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$ de f est donnée par $f_2(e) = e \cup e$ où $e \in \mathrm{Ext}^1(E,E)$.*
3. *Soit $\mathfrak{a} \subset \widehat{A}$ l'idéal engendré par l'image de l'application adjointe $f : \mathrm{Ext}^2(E,E)_0^* \to \mathfrak{m}^2\widehat{A}$. Alors il y a un isomorphisme des anneaux complets $\widehat{\mathcal{O}}_{M,[E]} \cong (\widehat{A}/\mathfrak{a})^{\mathrm{Aut}(E)}$.*

On verra f ou bien comme un élément de $\mathrm{Ext}^2(E,E)_0 \otimes \mathfrak{m}^2\widehat{A}$ ou bien comme une fonction formelle $\mathrm{Ext}^1(E,E) \to \mathrm{Ext}^2(E,E)_0$ selon le contexte. Évidemment, f n'est pas unique : par exemple, on pourrait y appliquer un changement équivariant de coordonnées. Nous rappelons la construction de f dans l'appendice en dérivant au même temps une autre propriété de f dont on aura besoin.

Soit F un faisceau stable sur une surface $K3$ ou abélienne et $V := \mathrm{Ext}^1(F,F)$. La composition

$$\omega : V \times V \xrightarrow{\cup} \mathrm{Ext}^2(F,F) \xrightarrow{\text{trace}} \mathbb{C} \tag{4.1}$$

définit une forme symplectique non-dégénérée. Soit $E = F \oplus F$. Alors on a $\mathrm{Aut}(E) = \mathrm{GL}_2$, $\mathrm{Ext}^1(E,E) = \mathfrak{gl}_2 \otimes V$ et $\mathrm{Ext}^2(E,E)_0 = \mathfrak{sl}_2$. La proposition suivante est un cas spécial de la proposition A.2 de l'appendice :

Proposition 4.2. — *Il existe un élément f comme dans la proposition 4.1 tel que f s'annule sur le sous-espace*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Ext}^1(F,F) & 0 \\ 0 & \mathrm{Ext}^1(F,F) \end{pmatrix} \subset \mathfrak{gl}_2 \otimes \mathrm{Ext}^1(F,F) = \mathrm{Ext}^1(E,E). \tag{4.2}$$

En fait, grâce à sa GL_2–équivariance, f s'annule sur toute l'orbite de ce sous-espace.

On suppose à partir de maintenant que $\dim(V) = 4$ et on choisit une base symplectique v_1, v_2, v_3, v_4 de V par rapport à laquelle la forme ω est donnée par la matrice

$$J := \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array}\right). \tag{4.3}$$

Soit $A = S^\bullet(\mathfrak{gl}_2 \otimes V)^*$, et soit $f : \mathfrak{sl}_2^* \to \widehat{A}$ une application de Kuranishi SL_2–équivariante pour le faisceau E qui s'annule sur $\mathfrak{d} \otimes V^*$, où $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{gl}_2$ désigne le sous-espace de matrices diagonales. Une telle fonction existe selon Prop. 4.1 et Prop. 4.2.

On identifie $\mathfrak{gl}_2 \otimes V = \mathfrak{gl}_2^{\oplus 4}$ en vertu de la base $(v_1, \ldots, v_4)$ et on désigne par $A_i : \mathfrak{gl}_2^{\oplus 4} \to \mathfrak{gl}_2$, $i = 1, .., 4$, la i-ième projection. On considère $A_1, \ldots, A_4$ comme des coordonnées à valeurs matricielles. Alors, comme la partie quadratique de f est donnée par le produit de Yoneda on trouve que f s'exprime en termes de ces A_i comme suit :

$$\begin{aligned} f(A_1, A_2, A_3, A_4) &= [A_1, A_2] + [A_3, A_4] \\ &\qquad + \text{termes de degree plus haut} \in \mathfrak{sl}_2, \text{ et} \\ f(A_1, A_2, A_3, A_4) &= 0, \text{ si les } A_i \text{ sont des matrices diagonales.} \end{aligned}$$

Soit $L \subset A$ l'idéal de l'adhérence du SL_2–orbite de $\mathfrak{d}^{\oplus 4}$ dans $\mathfrak{gl}_2^{\oplus 4}$. On a donc $\mathfrak{a} \subset L\widehat{A}$, où $\mathfrak{a} \subset \widehat{A}$ est l'idéal de la proposition 4.1.

Selon le premier et le deuxième théorème de la théorie des invariants [17] pour le groupe SL_2 le sous-anneau des invariants A^{SL_2} est engendré par les fonctions suivantes : $(i, j = 1, \ldots, 4)$

1. $X_i = \mathrm{tr}(A_i)$,
2. $Y_{ij} = \mathrm{tr}(A'_i A'_j)$, où $A'_i = A_i - \frac{1}{2} X_i \,\mathrm{id}$,
3. $T_i = (-1)^i \,\mathrm{tr}(A'_1, \ldots, \widehat{A'_i}, \ldots, A'_4)$, où $\widehat{\ }$ signifie qu'on enlève le facteur en question.

Si $Y = (Y_{ij})$ et $T = (T_i)$, alors les relations fondamentales entre elles sont :

$$Y = Y^t, \quad \det(Y) = 0, \quad YT = 0, \quad TT^t = -2\mathrm{adj}(Y), \tag{4.4}$$

où $\mathrm{adj}(Y)$ désigne la matrice adjointe de Y.

D'autre part, l'idéal $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap \widehat{A}^{\mathrm{SL}_2}$ contient la fonction

$$T'_1 := -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(A'_2 f(A_1, \ldots, A_4)) = T_1 + \text{termes de degree plus haut} \tag{4.5}$$

(et d'une façon similaire des fonctions $T'_i = T_i + \ldots$ pour les autres indices), et aussi

$$\mathrm{tr}(A'_i A'_j f(A_1, \ldots, A_4)) = (YJY)_{ij} + \text{termes de degree plus haut.} \tag{4.6}$$

Grâce à (4.5), on peut remplacer les T_i par les T'_i comme coordonnées. Ensuite, en calculant modulo $\mathfrak{a}_0$, on peut éliminer les T'_i complètement. On en déduit que

$$(\widehat{A}/\mathfrak{a})^{\mathrm{SL}_2} = \widehat{A}^{\mathrm{SL}_2}/\mathfrak{a}_0 \cong \mathbb{C}[[X_1 \ldots, X_4, Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{44}]]/I \tag{4.7}$$

pour un certain idéal I qui contient des fonctions

(4.8)

$$f_{ab}(X_i, Y_{jk}) := (YJY)_{ab} + \text{termes de degree plus haut}, \quad 1 \leq a \leq b \leq 4.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $L \cap A^{\mathrm{SL}_2}$ est engendré par tous les 2×2–mineurs $Y_{ab}Y_{cd} - Y_{ad}Y_{bc}$ de Y.

Pour simplifier les notations dans la discussion suivante on identifie l'espace des matrices symétrique Sym_4 avec l'algèbre de Lie symplectique $\mathfrak{sp}_4$ en vertu de l'application $Y \mapsto B := YJ$. Par abus de notation on garde la notation I. Rappelons que $I_0 \subset L_0 \subset \mathbb{C}[\mathfrak{sp}_4]$ désigne l'idéaux engendré par les coefficients des matrices B^2 et $\Lambda^2 B$, respectivement (Cf. Sec. 2). Résumons donc :

Proposition 4.3. — *Soit $\widehat{R}$ la complétion de $R = \mathbb{C}[\mathbb{C}^4 \times \mathfrak{sp}_4]$ dans l'origine. Il y a des idéaux $I' \subset I \subset L_0\widehat{R} \subset \widehat{R}$ tels que*

(i) *il y a un isomorphisme $\Phi : \widehat{\mathcal{O}}_{M,[E]} \cong \widehat{A}^{\mathrm{SL}_2}/\mathfrak{a}_0 \cong \widehat{R}/I$,*

(ii) *I' est engendré par des fonctions $f_\alpha(X, B)$, $\alpha = 1, \ldots, 6$, dont les termes initiaux quadratiques engendrent l'idéal I_0R. Ici $X \in \mathbb{C}^4$ et $B \in \mathfrak{sp}_4$.*

(iii) *Sous l'isomorphisme Φ l'idéal L_0 correspond au lieu des faisceaux strictement semi-stables (= semi-stables mais non stables), et donc au lieu singulier du germe formel.*

Démonstration. (i) est conséquence de la discussion précédente. Pour voir (ii), on remarque que I contient les fonctions $\tilde{f}_{ac} = \sum_b f_{ab}J_{bc}$ dont les termes quadratiques sont données par $(YJYJ)_{ac} = (B^2)_{ac}$. L'idéal I_0 est engendré par 6 quadriques ; ainsi on peut choisir les f_α parmi les $\tilde{f}_{ac}$. Pour (iii) et l'inclusion $I \subset L_0\widehat{R}$, il suffit de vérifier que $L_0R = L \cap A^{\mathrm{SL}_2}$ qu'on voit par un calcul direct. □

Soit $h \in \widehat{R}$ une fonction non nulle et $h = h_0 + h_1 + h_2 + \ldots$ sa décomposition en termes homogènes. L'ordre de h est l'index minimal ν tel que $h_\nu \neq 0$. Le terme initial de h est $\mathrm{in}(h) := h_\nu \in R$. Les termes initiaux $\mathrm{in}(h)$ de tous les éléments h d'un idéal $\mathfrak{b} \subset \widehat{R}$ engendrent son idéal initial $\mathrm{in}(\mathfrak{b}) \subset R$. Il a y un isomorphisme canonique d'anneaux gradués associés $\mathrm{gr}(\widehat{R}/\mathfrak{b}) = R/\mathrm{in}(\mathfrak{b})$.

Lemme 4.4. — *Avec les notations de proposition 4.3 on a*

$$I' = I \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{in}(I) = I_0R. \tag{4.9}$$

Démonstration. Par définition de I', on a les inclusions $I_0R \subset \mathrm{in}(I') \subset \mathrm{in}(I)$. Ils induisent de surjections $\mathrm{gr}(\widehat{R}/I) \to \mathrm{gr}(\widehat{R}/I') \to R/I_0R$ et impliquent ainsi des inégalités

$$10 = \dim_{[E]} M = \dim \widehat{\mathcal{O}}_{M,[E]} = \dim(\widehat{R}/I) \geq \dim(\widehat{R}/I') \geq \dim R/I_0.$$

Comme $\dim R/I_0R = 10$ on doit avoir égalité partout, et comme I_0 est un idéal premier il s'ensuit que $I_0R = \mathrm{in}(I') = \mathrm{in}(I)$. Si donc les termes initiaux des f_α engendrent l'idéal initial de I, les f_α elles-mêmes engendrent I, c'est-à-dire $I' = I$. □

Théorème 4.5. — *Soit X une surface K3 ou abélienne et F un faisceau stable par rapport à une polarisation H tel que* $\dim Ext^1(F, F) = 4$. *Soit* $E =$

$F \oplus F$ et M l'espace de modules des faisceaux semi-stables ayant vecteur de Mukai $v(E)$. Alors il y a un isomorphisme des germes d' espaces analytiques

$$(M,[E]) \cong (\mathrm{Spec}_{\mathrm{an}}\, R/I_0R, 0) \cong (\mathbb{C}^4 \times Z, 0). \tag{4.10}$$

Pour démontrer ce théorème, il suffira, grâce au théorème d'Artin (voir [3] Cor. 1.6), de trouver un isomorphisme $\widehat{\mathcal{O}}_{M,[E]} \cong (R/I_0)^\wedge$ d'anneaux complets. En vue de la proposition 4.3 on est ramené à prouver que

$$\widehat{R}/I = \widehat{R}/I_0\widehat{R}. \tag{4.11}$$

On va prouver cet isomorphisme en montrant que la déformation de $\widehat{R}/I$ vers son cône normal est essentiellement une déformation triviale.

5. La déformation vers le cône normal

On garde les notations de la section précédente.

Soit $\mathfrak{m} \subset R$ l'idéal maximal des fonctions qui s'annulent à l'origine et soit $R[t]^\wedge$ la complétion par rapport à la topologie $\mathfrak{m}R[t]$–adique. Comme ci-dessus on désigne par

$$f_\alpha = f_{\alpha,2} + f_{\alpha,3} + f_{\alpha,4} + \dots, \quad \alpha = 1, \dots, 6, \tag{5.1}$$

la décomposition en termes homogènes et on pose

$$F_\alpha(t) := f_{\alpha,2} + tf_{\alpha,3} + t^2 f_{\alpha,4} + \dots, \quad \alpha = 1, \dots, 6. \tag{5.2}$$

Le quotient $S = R[t]^\wedge/J$ avec $J := (F_1, \dots, F_6)$ satisfait à

$$S_\lambda := S/(t-\lambda)S = \begin{cases} \widehat{R}/I_0\widehat{R}, & \text{si } \lambda = 0, et \\ \widehat{R}/I, & \text{si } \lambda \neq 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Grâce au fait que $I_0R = \mathrm{in}(I)$ (Lemme 4.4), S est plat sur $\mathbb{C}[t]$.

A partir de maintenant on écrira $x_1, \dots, x_{14}$ pour les coordonnées X_i et B_{ab} de $\mathbb{C}^4 \times \mathfrak{sp}_4$.

On dira qu'un élément de $R[t]^\wedge$ est homogène de poids k, si son coefficient devant t^m est homogène de degré $k+m$. Par exemple, $\partial_{x_i}F_\alpha$, F_α et $\partial_t F_\alpha$ sont homogènes de poids 1, 2 respectivement 3. Évidemment, un élément arbitraire $g \in R[t]^\wedge$ peut s'écrire comme série convergente $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g^{(k)}$ avec des éléments homogènes uniques $g^{(k)} \in R[t]^\wedge$ de poids k.

Proposition 5.1. — *Il y a des fonctions homogènes $\Phi_i(x,t) \in R[t]^\wedge$ de poids 2 pour $i = 1, \dots, 14$, et des fonctions $h_{\alpha\beta}(x,t) \in R[t]^\wedge$ de poids 1 pour $\alpha, \beta = 1, \dots, 6$, telles que*

$$\sum_i \Phi_i(x,t)\partial_{x_i}F_\alpha(x,t) = \partial_t F_\alpha(x,t) + \sum_\beta h_{\alpha\beta}(x,t)F_\beta(x,t). \tag{5.4}$$

Démonstration. On considère le module $T^1_{S/\mathbb{C}[t]}$ défini par la suite exacte

$$S\langle \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{14}}\rangle \xrightarrow{\Theta} Hom_S(J/J^2, S) \longrightarrow T^1_{S/\mathbb{C}[t]} \longrightarrow 0 \tag{5.5}$$

et de même le module $T^1_{S_0}$ définit par

$$S_0\langle \partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_{14}}\rangle \xrightarrow{\Theta} Hom_{\mathcal{O}_{S_0}}(I_0/I_0^2, \mathcal{O}_{S_0}) \longrightarrow T^1_{S_0} \longrightarrow 0, \tag{5.6}$$

où Θ signifie l'action d'un champ vectoriel sur les fonctions de J et de I_0 respectivement. Considérons maintenant l'élément

$$\partial_t \in Hom(J/J^2, \mathcal{O}_S), \quad \partial_t(F_\alpha) = f_{\alpha,3} + 2tf_{\alpha,4} + 3t^2 f_{\alpha,5} + \ldots. \tag{5.7}$$

Trouver des fonctions Φ_i et $h_{\alpha\beta}$ satisfaisant l'équation (5.4) équivaut à montrer que ∂_t est contenu dans l'image de l'application Θ ou bien que la classe de ∂_t dans $T^1_{S/\mathbb{C}[t]}$ est nulle.

On utilise les faits suivants : Par le critère de Jacobi le module $T^1_{S/\mathbb{C}[t]}$ est supporté sur le lieu singulier relative de S. Par les résultats de O'Grady [14], les singularités de S_λ sont de type A_1 en dehors de l'origine. En particulier, $T^1_{S/\mathbb{C}[t]}$ est un module inversible en dehors de l'origine et donc est annulé par l'idéal L_0 de lieu singulier. D'autre part, comme $I \subset L_0$ et comme L_0 est engendré par des éléments homogènes, tous les composants homogènes des f_α sont contenus dans L_0. Par conséquent, ∂_t est annulé par L_0 et définit donc une section de $T^1_{S/\mathbb{C}[t]}$ qui, pour $t = \lambda$ fixé, est supportée à l'origine. Il suffit donc de montrer que $T^1_{S/\mathbb{C}[t]}$ est un module pur, c'est-à-dire sans sous-module de dimension plus petite. La multiplication par le paramètre t fournit la suite exacte

$$T^1_{S/\mathbb{C}[t]} \xrightarrow{t} T^1_{S/\mathbb{C}[t]} \longrightarrow T^1_{S_0}. \tag{5.8}$$

On déduit du théorème 3.1 que $T^1_{S_0}$ est pur de dimension 8 et génériquement de rang 1. Il s'ensuit que $T^1_{S/\mathbb{C}[t]}$ est pur de dimension 9 et donc que la classe de ∂_t dans $T^1_{S_0}$ est nulle.

Ainsi il y a des fonctions Φ_i, $h_{\alpha\beta} \in R[t]^\wedge$ telles qu'on ait (5.4). Il reste à montrer que l'on peut choisir ces fonctions comme homogènes. Mais comme F_α et ses dérivées sont homogènes, les parties homogènes de degré 2 dans Φ_i et de degré 1 dans $h_{\alpha\beta}$ sont aussi des solutions de (5.4). Donc on peut supposer que Φ_i et $h_{\alpha\beta}$ sont homogènes. □

Proposition 5.2. — *Il y a des fonctions $\Psi_i \in R[t]^\wedge$ homogènes de poids 1 pour $i = 1, \ldots, 14$, et $M_{\alpha\beta} \in R[t]^\wedge$ homogènes de poids 0 pour $\alpha, \beta = 1, \ldots, 6$, telles que*

1. $M_{\alpha,\beta}(x, 0) = \delta_{\alpha\beta}$,

2. $\Psi_i(x,0) = x_i$,
3. $F_\alpha(\Psi(x,t),t) = \sum_\beta M_{\alpha\beta}(\Psi(x,t),t) f_{\beta,2}(x)$.

Démonstration. Soient Φ_i et $h_{\alpha\beta}$ les fonctions de la proposition 5.1. On définit un changement de coordonnées formel $\Psi(x,t)$ et une matrice inversible $M(x,t)$ comme solutions du système des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \Psi_i(x,t) = -\Phi_i(\Psi(x,t),t), \\ \Psi_i(x,0) = x_i, \end{cases} \tag{5.9}$$

et

$$\begin{cases} \partial_t M_{\alpha\beta}(x,t) = \sum_i \Phi_i(x,t)\partial_i M_{\alpha\beta}(x,t) - \sum_\beta h_{\alpha\gamma}(x,t) M_{\gamma\beta}(x,t) \\ M_{\alpha\beta}(x,0) = \delta_{\alpha\beta} \end{cases} \tag{5.10}$$

Remarquons que – grâce au fait que Φ_i et $h_{\alpha\beta}$ sont homogènes et commencent avec des termes quadratique respectivement linéaires en les variables x_i – ses équations se résolvent aisément par récurrence par rapport au degré en les variables x_i.

En utilisant les relations (5.4), (5.9) et (5.10) on vérifie qui les fonctions

$$g_\alpha(x,t) := F_\alpha(\Psi(x,t),t) - \sum_\beta M_{\alpha\beta}(\Psi(x,t),t) f_{\beta,2}(x) \tag{5.11}$$

satisfont à l'équation différentielle

$$\partial_t g_\alpha(x,t) = -\sum_\beta h_{\alpha\beta}(\Psi(x,t),t) g^\beta(x,t). \tag{5.12}$$

Comme $g_\alpha(x,0) = 0$, on déduit que $g_\alpha(x,t) = 0$. $\square$

Avec les notations de la proposition précédente on pose

$$\Psi(x) := (\Psi_i(x,1)) \in \mathrm{Aut}(\widehat{R}) \tag{5.13}$$

et

$$M(x) := (M_{\alpha\beta}(x,1)) \in \mathrm{GL}_6(\widehat{R}). \tag{5.14}$$

En évaluant les identités de la proposition en $t = 1$ on obtient :

$$f_\alpha(\Psi(x)) = \sum_\beta M_{\alpha\beta}(x) f_{\beta,2}(x). \tag{5.15}$$

Donc l'automorphisme $\Psi : \widehat{R} \to \widehat{R}$ envoie I sur $I_0\widehat{R}$ et induit un isomorphisme

$$\Psi : \widehat{R}/I \longrightarrow \widehat{R}/I_0\widehat{R}. \tag{5.16}$$

ce qui termine la démonstration de (4.11) et donc du théorème 4.5.

Fin de la démonstration du théorème 1.1 : Rappelons que le vecteur de Mukai d'un faisceau cohérent E sur une surface $K3$ projective ou abélienne est donné par $v(E) = \mathrm{ch}(E)\sqrt{\mathrm{td}(X)}$ (voir [11]). Alors se donner un vecteur de Mukai équivaut à fixer le rang et les classes de Chern d'un faisceau, et $\dim \mathrm{Ext}^1(E,E) = \langle v(E), v(E)\rangle + 2\dim \mathrm{End}(E)$. Les hypothèses du théorème entraînent qu'il y a seulement trois types de faisceaux poly-stable dans M_{2v} :

(1) Les faisceaux stables E avec $v(E) = v$. Par les résultats de Mukai, M_{2v} est lisse dans $[E]$ de dimension égale à $\dim \mathrm{Ext}^1(E,E) = 4\cdot 2+2 = 10$.

(2) Les faisceaux $E = F_1 \oplus F_2$ avec des faisceau stable non-isomorphes F_1 et F_2 où $v(F_1) = v(F_2) = v$. Chaque composante F_i varie dans l'espace de module M_v de dimension 4, et donc les points dans M_{2v} de ce type forme une variété $S^2M_v \setminus \Delta_{M_v}$ de dimension 8. Ils sont les points singuliers génériques de M_{2v}.

(3) Les faisceaux $E = F^{\oplus 2}$ avec un faisceau stable F de vecteur de Mukai $v(F) = v$. Grâce à l'hypothèse $\langle v, v\rangle = 2$, l'espace vectoriel symplectique $V = \mathrm{Ext}^1(F,F)$ a la dimension 4.

De cette façon, O'Grady [14] a obtenu une stratification $M_{2v} \supset S^2M_v \supset \Delta_{M_v}$ de l'espace de modules singulier. Il a aussi montré que la singularité d'un point de $S^2M_v \setminus \Delta_{M_v}$ est de type A_1 à travers de S^2M_v. Donc l'éclatement de $M_{2v} \setminus \Delta_{M_v}$ le long $S^2M \setminus \Delta_{M_v}$ est une résolution symplectique.

Les faisceaux de type (3) correspondants aux points de Δ_{M_v} satisfont aux hypothèses des théorèmes 4.5 et 2.1. On déduit que l'éclatement de M_{2v} le long de S^2M_v est une résolution semi-petite. $\square$

A. Appendice : L'application de Kuranishi

Soit E un faisceau polystable sur une surface projective lisse. Les déformations infinitésimales de E se décrivent en termes des solutions de l'équation de Maurer-Cartan comme suit :

Soit $E = \bigoplus_i E_i^{\oplus n_i}$ la décomposition de E comme somme directe de faisceaux stables. En choisissant des résolutions $E_i \to I_{(i)}$ et en formant $I = \bigoplus_i I_{(i)}^{\oplus n_i}$ on obtient une résolution $E \to I$ qui est injective et équivariante pour l'action canonique du groupe $\mathrm{Aut}(E) = \prod_i \mathrm{GL}_{n_i}$.

Le différentiel d_I de I est un élément de degré 1 dans $\mathfrak{g} := \mathrm{End}(I,I)$ et définit un différentiel équivariant $d = \mathrm{ad}(d_I)$ sur $\mathfrak{g}$. Alors $H(\mathfrak{g}, d) = \mathrm{Ext}(E,E)$. Soient $B\mathfrak{g} \subset Z\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ les sous-complexes des cobords et des cocycles. On choisit, une fois pour tout, des homomorphismes équivariants $s : H\mathfrak{g} \to Z\mathfrak{g}$

et $t : B\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ de degré 0 et -1 respectivement qui scindent les surjections naturelles $\overline{} : Z\mathfrak{g} \to H\mathfrak{g}$ et $d : \mathfrak{g} \to B\mathfrak{g}$.

Soit $(A', \mathfrak{m}')$ un anneau local artinien avec $A'/\mathfrak{m}' = \mathbb{C}$ et soit $d' \in \mathfrak{g}^1 \otimes A'$ tel que

$$d' \otimes A'/\mathfrak{m}' = d_I \quad \text{et} \quad d'^2 = 0. \tag{A.1}$$

On sait que $(I \otimes A', d')$ est un complexe acyclique et que $E' := H^0(I \otimes A', d')$ est une déformation plate de E sur A'. Réciproquement, toutes les déformations s'obtiennent ainsi. Supposons en plus que $A'' \to A'$ est un épimorphisme des anneaux artiniens dont le noyau $J \subset A''$ est annulé par l'idéal maximal $\mathfrak{m}'' \subset A''$. Pour étendre d' à A'' il faut choisir un élément $d'' \in \mathfrak{g} \otimes A''$ qui se restreint à d'. Grâce à la relation $d'^2 = 0$ on a $d''^2 \in \mathfrak{g}^2 \otimes J$. Cet élément est en fait un cocycle et sa classe $\mathfrak{o}(d', A'') \in \mathrm{Ext}^2(E, E) \otimes J$ ne dépend pas du choix de d''. Il est aussi bien connu (voir [1, 2]) que la trace de cette classe d'obstruction est nulle. Donc le plus grand quotient $A''/\mathfrak{a}$ tel qu'une extension de E' à A'' existe est donné par l'idéal $\mathfrak{a}$ engendré par l'image de l'application ajointe $\mathfrak{o}(d', A'') : \mathrm{Ext}^2(E, E)_0^* \to J \subset A''$.

On est amené à l'algorithme suivant pour le calcul de la déformation verselle de E : Soit $U = \mathrm{Ext}^1(E, E)^*$, $A = S^\bullet U = \mathbb{C}[\mathrm{Ext}^1(E, E)]$, $\widehat{A}$ la complétion de A à l'origine et $\mathfrak{m} \subset \widehat{A}$ son idéal maximal. On désigne par $\gamma_1 = (s \otimes 1)(\mathrm{id}_U) \in Z^1(\mathfrak{g} \otimes \widehat{A})$ le cocycle tautologique.

Proposition A.1. — *Il y a des éléments équivariants*

$$\gamma_n \in \mathfrak{g}^1 \otimes S^n U \quad \textit{et} \quad f_n \in \mathrm{Ext}^2(E, E)_0 \otimes S^n U, \quad \textit{pour } n \geq 2,$$

avec les propriétés suivantes : Si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$ et $f = f_2 + f_3 + \ldots$, et si on désigne par $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}^2 \subset \widehat{A}$ l'idéal engendré par l'image de $f : \mathrm{Ext}^2(E, E)_0^* \to \widehat{A}$, alors

$$(d_I + \gamma)^2 - s(f) \in \mathfrak{g}^2 \otimes \mathfrak{a}\mathfrak{m}.$$

En particulier, $d_I + \gamma$ définit une déformation plate de E sur $\widehat{A}/\mathfrak{a}$.

Démonstration. On va construire f_n et γ_n par récurrence. On suppose que $n \geq 2$ et qu'on a déjà trouvé des éléments $\gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ et $f_2, \ldots, f_{n-1}$ tels que

$$x := (d + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{n-1})^2 - s(f_2 + \ldots + f_{n-1}) \in \mathfrak{g}^2 \otimes (\mathfrak{a}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^n). \tag{A.2}$$

Comme γ_1 est un cocyle, cette hypothèse est certainement vérifiée pour $n = 2$. Remarquons que $\mathfrak{a}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^{n+1}$ est bien définie par $f_2, \ldots, f_{n-1}$. Or,

$$d(x) \in \mathfrak{g}^3 \otimes (\mathfrak{a}\mathfrak{m} + \mathfrak{m}^{n+1}) \tag{A.3}$$

puisque

$$\begin{aligned} 0 &= [d+\gamma_1+\ldots+\gamma_{n-1},(d+\gamma_1+\ldots+\gamma_{n-1})^2] \\ &= d(x)+[\gamma_1+\ldots+\gamma_{n-1},s(f_2+\ldots+f_{n-1})+x]. \end{aligned}$$

Donc la classe

$$[x]\in\mathfrak{g}^2\otimes\frac{\mathfrak{am}+\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{am}+\mathfrak{m}^{n+1}}$$

de x est un cocycle. Sa classe de cohomologie $\overline{[x]}$ est l'obstruction pour l'extension de $\widehat{A}/\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n$ à $\widehat{A}/\mathfrak{m}(\mathfrak{a}+\mathfrak{m}^n)$ et donc sans trace. Selon le théorème de Weyl il y a un scindage équivariant q de la projection de $\mathrm{Aut}(E)$–modules

$$S^nU=\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}\longrightarrow\frac{\mathfrak{am}+\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{am}+\mathfrak{m}^{n+1}}.$$

Soit $z=q([x])\in Z^2\mathfrak{g}\otimes S^nU$. On pose $f_n=\overline{z}$, $\gamma_n:=t(s(f_n)-z)\in\mathfrak{g}^1\otimes S^nU$ et $x':=x-z+[\gamma_1+\ldots+\gamma_n,\gamma_n]$. Par construction, f_n et γ_n sont équivariants, et

$$(d+\gamma_1+\ldots+\gamma_n)^2-s(f_2+\ldots+f_n)x'\in\mathfrak{g}^2\otimes(\mathfrak{am}+\mathfrak{m}^{n+1}).$$

□

Soit maintenant X une surface $K3$. Soient F un faisceau stable et $E=F^{\oplus r}$. Alors $\mathrm{Aut}(E)\cong\mathrm{GL}_r$ et la résolution $E\to I_E$ a la forme $I_E\cong\mathbb{C}^r\otimes I_F$ pour une résolution $F\to I_F$. Aussi, $\mathrm{End}(I_E,I_E)\cong\mathfrak{gl}_r\otimes\mathfrak{g}$ avec $\mathfrak{g}=\mathrm{End}(I_F)$.

On dénote par F_a la a-ième composante de E. Il y a une décomposition canonique $U=\bigoplus_{ab}U_{ab}$ avec $U_{ab}=\mathrm{Ext}^1(F_b,F_a)^*$. Soit $\mathfrak{q}\subset(S^\bullet U)^\wedge$ l'idéal engendré par les sous-espace $U_{ab}\subset U$, $a\neq b$, et soit $U':=U_{11}\oplus\ldots\oplus U_{rr}$, tel que $(S^\bullet U)^\wedge/\mathfrak{q}=(S^\bullet U')^\wedge$.

Proposition A.2. — *Soient γ et f des éléments construits pour le faisceau E par la méthode de la démonstration précédente. Alors*

$$f\begin{pmatrix} e_1 & 0 & & 0\\ 0 & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_r\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ & & & 0\end{pmatrix}\quad et\ \gamma\begin{pmatrix} e_1 & 0 & & 0\\ 0 & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e_r\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} \tilde\gamma(e_1) & 0 & & 0\\ 0 & \tilde\gamma(e_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde\gamma(e_r)\end{pmatrix}$$

pour $e_a\in\mathrm{Ext}^1(F_a,F_a)$, $a=1,\ldots r$, où $\tilde\gamma\in\mathfrak{g}^1\otimes(S^\bullet\,\mathrm{Ext}^1(F,F)^*)^\wedge$ satisfait à $(d+\tilde\gamma)^2=0$.

Démonstration. La proposition affirme que f s'annule modulo $\mathfrak{q}$ et que – encore modulo $\mathfrak{q}$ – γ prend une forme diagonale avec coefficients $\gamma_{aa}\in(S^\bullet U_{aa})^\wedge$. Que ces coefficients sont données par la même fonction $\tilde\gamma$ est d'ailleurs une conséquence immédiate de l'équivariance de γ sous l'action du groupe symétrique.

On va montrer par induction que l'affirmation est vraie modulo $\mathfrak{m}^n$ pour tous $n \geq 2$. Le cas $n = 2$ est trivial grâce à la nature tautologique du cycle γ_1. Supposons alors que $n > 2$ et que le résultat est déjà montré modulo $\mathfrak{m}^n$. Donc par hypothèse d'induction $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q} + \mathfrak{m}^n$. Cela implique que la flèche i du diagramme canonique

$$\begin{array}{ccc} S^nU & \longrightarrow & \frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}+\mathfrak{a}\mathfrak{m}} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ S^nU' & \xrightarrow{i} & \frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}+\mathfrak{a}\mathfrak{m}+\mathfrak{q}\cap\mathfrak{m}^n} \end{array} \tag{A.4}$$

est un isomorphisme.

On garde les notations de la démonstrations précédente. Parce que l'élément x s'exprime complètement en termes de f et de γ il suit que la classe de x modulo $\mathfrak{q}$ a la même structure diagonale comme γ. Il suit de la commutativité du diagramme (A.4) et du fait que i est un isomorphisme que la projection de $z \in S^nU$ dans S^nU' a aussi une telle structure, c'est-à-dire est contenue dans le sous-espace $S^nU_{11} \oplus \ldots \oplus S^nU_{rr}$. Cette propriété est héritée par $f_n = \overline{z}$ et $\gamma_n = s(f_n) - z_n$. En particulier, les coefficients diagonaux des classes de f_n et de γ_n modulo $\mathfrak{q}$ donnent des solutions pour l'équation de Maurer-Cartan pour chaque composante $F_a \subset E$ individuellement. Mais $\mathrm{Ext}^2(F_a, F_a)_0 = 0$ et ainsi il n'y a pas d'obstruction pour une telle déformation. On conclut que $f \equiv 0 \mod \mathfrak{q}$. □

Références

[1] I. V. Artamkin, Deformation of torsion-free sheaves on an algebraic surface. (En russe) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 54 (1990), 435–468 ; (traduction anglaise) Math. USSR-Izv. 36 (1991), 449–485.

[2] I. V. Artamkin, On the deformation of sheaves. (En russe) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 52 (1988), 660–665, 672 ; (traduction anglaise) Math. USSR-Izv. 32 (1989), 663–668.

[3] M. Artin, On the solutions of Analytic Equations. Invent. math. 5 (1968), 277–291 .

[4] A. Beauville, Variétés kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. J. Differential Geom. 18 (1983), 755–782.

[5] D. H. Collingwood, W. M. McGovern, Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993. xiv+186 pp.

[6] G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann. Singular 2.0. A Computer Algebra System for Polynomial Computations. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern (2001). `http ://www.singular.uni-kl.de`

[7] P. Griffiths, Hermitian differential geometry, Chern classes, and positive vector bundles. in : Global Analysis, papers in honor of K. Kodaira, pp. 185–251, Princeton University Press 1969.

[8] B. Fu, Symplectic resolutions for nilpotent orbits. Invent. Math. 151 (2003), 167–186.

[9] M. Haiman, t,q-Catalan numbers and the Hilbert scheme, Discrete Math. 193 (1998), no. 1-3, 201–224, Selected papers in honor of Adriano Garsia (Taormina, 1994).

[10] M. Haiman, Hilbert schemes, polygraphs, and the Macdonald positivity conjecture., J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 941–1006.

[11] D. Huybrechts, M. Lehn, The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves. Aspects of Mathematics E31, Vieweg Verlag 1997

[12] D. Kaledin, M. Lehn, Ch. Sorger, Singular Symplectic Moduli Spaces. À paraître dans Invent. Math.

[13] S. Kleiman, Les théorèmes de finititude pour le foncteur de Picard, SGA 6, Exp. 13, Springer Lecture Notes 225, 1971

[14] K. O'Grady, Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3, J. reine angew. Math. 512 (1999), 49–117.

[15] K. O'Grady, A new six-dimensional irreducible symplectic variety. J. Algebraic Geom. 12 (2003), 435–505.

[16] A. Rapagnetta, Topological invariants of O'Grady's six dimensional irreducible symplectic variety. math.AG/0406026.

[17] H. Weyl, The Classical Groups, Princeton Math. Series 1, Princeton 1946.

[18] K. Yoshioka, Moduli spaces of stable sheaves on abelian surfaces. Math. Annalen 321 (2001), 817–884.

[19] K. Yoshioka, A note on Fourier-Mukai transform, math.AG/0112267.

Manfred Lehn, Institut für Mathematik, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, D-55099 Mainz, Allemagne

E-mail address: `lehn@mathematik.uni-mainz.de`

Christoph Sorger, Institut Universitaire de France & Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (UMR 6629 du CNRS), Université de Nantes, 2, Rue de la Houssinière, BP 92208, F-44322 Nantes Cedex 03, France

E-mail address: `christoph.sorger@univ-nantes.fr`